

Zur analytischen Behandlung räumlicher Gelenkketten

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 42, 1990/91,
S.147-159



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur analytischen Behandlung räumlicher Gelenkketten

Von **Hans Robert Müller**, Braunschweig

(Eingegangen am 11.10.1991)

Mit einfachen algebraischen Hilfsmitteln werden Gelenkketten im 3-dimensionalen euklidischen Raum und damit zusammenhängende Fragestellungen behandelt. Für den sogenannten allgemeinen Fall einer räumlichen Gelenkkette wird ein algorithmisches Verfahren entwickelt, das nicht nur zur geometrisch-kinematischen Analyse, sondern auch zum Aufbau und zur Konstruktion von Gelenkwerken mit gewünschten Eigenschaften benützt werden kann. Für n -gliedrige geschlossene Ketten werden Geschlossenheitsbedingungen formuliert und insbesondere auf Gelenkvierecke eingegangen und deren Starrheit, Beweglichkeit bzw. infinitesimale Beweglichkeit (Wackeligkeit) untersucht. Bei Annahme von Symmetrieeigenschaften der Gelenkvierecke werden Klassen von ausgezeichneten Beispielen geschaffen, unter die sich nicht nur der *Bennettsche Mechanismus*, sondern auch ein Gegenstück, sowie viele bekannte Vierecke einreihen, deren Abmessungen in Zahlen angegeben wurden.

I. Hilfsmittel

Bezogen auf ein rechtwinkeliges cartesisches Koordinatensystem werde eine gerichtete Gerade \mathcal{A} durch ihren Richtungsvektor a vom Betrag $|a| = 1$ und einen ihrer Punkte X mit $\overrightarrow{OX} = x$ gegeben. Das vektorielle Moment in Bezug auf den Koordinatenursprung O ist $\bar{a} = x \times a$. Dieser Momentvektor ist von der Wahl des Punktes X auf \mathcal{A} unabhängig. Die 6 Koordinaten von a und \bar{a} sind inhomogene *Plückersche Linienkoordinaten*. Neben der Normierungsbedingung $a^2 = 1$ erfüllen sie die *Plückersche Gleichung* in Form des Skalarproduktes $a\bar{a} = 0$.

Nach *E. Study* kann man das Vektorpaar a, \bar{a} zu einem dualen Vektor

$$\mathcal{A} = a + \varepsilon \bar{a} \quad \text{mit} \quad \varepsilon^2 = 0$$

zusammenfassen. Die Koordinaten eines solchen dualen Vektors sind dual-komplexe Zahlen $x + \varepsilon y$, mit denen wir wie mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen $x + iy$ mit $i^2 = -1$ bei reellen x und y rechnen können, nur daß zum Verbot der Division durch Null noch das Verbot der Division durch einen Nullteiler in Gestalt einer rein dualen Zahl εy hinzukommt. Dies läßt sich auch so ausdrücken: Man kann mit dualen Zahlen und Funktionen wie mit Potenzreihen operieren, die man nach dem linearen Glied abbricht. Dem entsprechend folgt nach der *Taylorschen Formel* die Erklärung:

$$f(x + \varepsilon y) = f(x) + \varepsilon y f'(x).$$

Somit

$$\sin(\varphi + \varepsilon \bar{\varphi}) = \sin \varphi + \varepsilon \bar{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\cos(\varphi + \varepsilon \bar{\varphi}) = \cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi,$$

wodurch auch die Winkelfunktionen dualer Winkel $\phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ erklärt sind.

Das formal gebildete Skalarprodukt des dualen Vektors \mathfrak{A} mit sich selbst ist nach obigem

$$\mathfrak{A}^2 = a^2 + 2\varepsilon (a\bar{a}) = 1.$$

In der Abbildung der gerichteten Geraden des euklidischen Raumes auf die dualen Einheitsvektoren und damit auf die dualen Punkte der ins „Duale“ erweiterten Einheitsphäre liegt das *Übertragungsprinzip der Liniengeometrie von E. Study* begründet.

Dem skalaren Produkt zweier dualer Einheitsvektoren

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (a + \varepsilon \bar{a})(b + \varepsilon \bar{b}) = ab + \varepsilon (a\bar{b} + \bar{a}b) = \cos \phi = \cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi$$

kommt eine einfache geometrische Bedeutung zu:

In der dualen Zahl $\phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}$ stellt der Realteil φ den Winkel und der Dualteil $\bar{\varphi}$ den Normalabstand (kürzesten Abstand) der beiden windschiefen Geraden \mathfrak{A} und \mathfrak{B} dar. Nebenbei ist der Ausdruck $a\bar{b} + \bar{a}b$ unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes 0 und wird ebenfalls als Moment bezeichnet.

Das Gemeinlot \mathfrak{C} von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} wird durch Bildung des Vektorproduktes erhalten:

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}{|\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}|} = \frac{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}{\sqrt{1 - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2}} = \frac{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}{\sin \phi}$$

oder

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \sin \phi, \quad \mathfrak{C}^2 = 1.$$

Für den Schnittpunkt S von \mathfrak{A} und \mathfrak{C} gilt mit $\overrightarrow{0S} = \mathfrak{s}$ wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 0$ oder ausführlich $a\bar{c} = 0$, $a\bar{\tau} + \bar{a}c = 0$ und wegen der Inzidenzbedingungen $\bar{a} = \mathfrak{s} \times a$, $\bar{\tau} = \mathfrak{s} \times c$ die Darstellung

$$\mathfrak{s} = (a\bar{\tau})a - (a\bar{a})c + (\bar{a}c)(a \times c). \quad (1)$$

Hierin ist das Spatprodukt $(a\bar{\tau}) = (a \times c)\bar{\tau}$.

Durch weitere Vektorproduktbildung findet man

$$(\mathfrak{C} \sin \phi) \times \mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{A} = \mathfrak{B} - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{A} = \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \cos \phi$$

oder

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cos \phi + (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}) \sin \phi. \quad (2)$$

Dies kann man geometrisch deuten:

Im Normalen-Netz der Achse \mathfrak{C} wird die Gerade \mathfrak{A} in die Gerade \mathfrak{B} verschraubt mit dem Drehwinkel φ und der Schiebstrecke $\bar{\varphi}$.

Hierbei handelt es sich um eine Rechtsschraube, wenn das zugrunde gelegte Koordinatensystem ein Rechtssystem ist.

Umgekehrt folgt durch Bildung von $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{B}$ das Zurückschrauben von \mathfrak{B} nach \mathfrak{A} :

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cos \phi - (\mathfrak{C} \times \mathfrak{B}) \sin \phi. \quad (3)$$

Die beiden Gleichungen des Verschraubens im Normalen-Netz lassen sich mittels *Hamiltonscher Quaternionen* auch kürzer schreiben. Eine Quaternion $\mathbf{P} = p + \mathfrak{p}$ läßt sich als Zusammenfassung des Skalars p und des Vektors \mathfrak{p} auffassen. p wird als Skalar-
teil von \mathbf{P} , \mathfrak{p} als Vektorteil von \mathbf{P} bezeichnet. Skalare und Vektoren sind also spezielle Quaternionen.

Das Quaternionenprodukt $\mathbf{P} \circ \mathbf{Q}$ läßt sich auf die Produktbildung von Skalaren und Vektoren zurückführen:

$$\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} = (p + \mathfrak{p}) \circ (q + \mathfrak{q}) = pq + p\mathfrak{q} + q\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{q} + p \times \mathfrak{q}$$

Mittels der zu \mathbf{P} konjugierten Quaternion $\hat{\mathbf{P}} = p - \mathfrak{p}$ läßt sich die Norm $N(\mathbf{P})$ erklären:

$$N(\mathbf{P}) = \mathbf{P} \circ \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}} \circ \mathbf{P} = p^2 + \mathfrak{p}^2$$

Für $N(\mathbf{P}) \neq 0$ stellt

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{N(\mathbf{P})} \hat{\mathbf{P}}$$

die inverse Quaternion zu \mathbf{P} dar, wobei $\mathbf{P} \circ \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \circ \mathbf{P} = 1$ gilt. All dies ist auf duale Quaternionen übertragbar.

Nun zurück zu den Verschraubungen im Normalen-Netz! Wir führen die duale Quaternion

$$\mathbf{Q} = \cos \phi + \mathfrak{C} \sin \phi$$

ein und können wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$ auch schreiben

$$\mathfrak{B} = \mathbf{Q} \circ \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \circ \mathbf{Q}. \quad (4)$$

Die zweite Gleichung des Zurückschraubens folgt aus der ersten wegen

$$N(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \circ \hat{\mathbf{Q}} = 1, \quad \hat{\mathbf{Q}} = -\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B} = -\mathfrak{B}$$

bei Bildung des Konjugiums. Wir halten fest:

Die Links-Multiplikation mit dem Quaternionen-Operator \mathbf{Q} bewirkt die Vorwärts-schraubung von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} , die Rechts-Multiplikation mit \mathbf{Q} bewirkt das Zurückschrauben von \mathfrak{B} nach \mathfrak{A} , jeweils im Normalen-Netz mit der Achse \mathfrak{C} .

Vergleiche zu diesem Abschnitt etwa *W. Blaschke* [1] und *A. T. Yang* und *F. Freudenstein* [2].

II. Gelenkketten

Mit diesen einfachen algebraischen Hilfsmitteln kann man nun Gelenkketten, deren einzelne Glieder durch Dreh-Schubgelenke (Schraubengelenke) miteinander verbunden sind, analysieren bzw. konstruieren, d.h. konstruktiv berechnen.

Wir betrachten eine n -gliedrige Kette mit Dreh-Schubgelenken und den Achsen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$. Zwei aufeinander folgende Schraubachsen \mathfrak{C}_{i-1} und \mathfrak{C}_i mögen vorgegebene Winkel (Schränkwinkel) α_i einschließen und Normalabstände (Stablängen) $\bar{\alpha}_i$ besitzen. Diese Größen fassen wir zu $A_i = \alpha_i + \varepsilon \bar{\alpha}_i$ zusammen. Der Schraubenbewegung um die Achse \mathfrak{C}_i entspreche der Operator

$$\mathbf{Q}_i = \cos \phi_i + \mathbb{C}_i \sin \phi_i, \quad (5)$$

in dem der Drehwinkel φ_i und die Schiebstrecke $\bar{\varphi}_i$ zu $\phi_i = \varphi_i + \varepsilon \bar{\varphi}_i$ vereint sind.

Die gemeinsamen orientierten Lote aufeinander folgender Achsen $\mathbb{C}_{i-1}, \mathbb{C}_i$ seien die Geraden \mathcal{A}_i . Dann gilt für die Schraubung, die \mathcal{A}_i nach \mathcal{A}_{i+1} bewegt,

$$\mathcal{A}_{i+1} = \mathbf{Q}_i \circ \mathcal{A}_i. \quad (6)$$

Umgekehrt können aufeinander folgende Schraubenachsen $\mathbb{C}_{i-1}, \mathbb{C}_i$ selbst wieder durch eine Schraubung um die Achse \mathcal{A}_i ineinander übergeführt werden. Dementsprechend bilden wir den Operator

$$\mathbf{R}_{i+1} = \cos A_{i+1} + \mathcal{A}_{i+1} \sin A_{i+1} \quad (7)$$

und können ganz analog schreiben

$$\mathbb{C}_{i+1} = \mathbf{R}_{i+1} \circ \mathbb{C}_i. \quad (8)$$

In Vektorschreibweise lauten (6) und (8)

$$\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i \cos \phi_i + (\mathbb{C}_i \times \mathcal{A}_i) \sin \phi_i, \quad (6')$$

$$\mathbb{C}_{i+1} = \mathbb{C}_i \cos A_{i+1} + (\mathcal{A}_{i+1} \times \mathbb{C}_i) \sin A_{i+1}, \quad (8')$$

was meist fürs praktische Rechnen vorteilhafter ist.

Gemäß (4) gilt für das Zurückschrauben

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i+1} \circ \mathbf{Q}_i = \mathcal{A}_{i+1} \cos \phi_i - (\mathbb{C}_i \times \mathcal{A}_{i+1}) \sin \phi_i, \quad (6'')$$

$$\mathbb{C}_i = \mathbb{C}_{i+1} \circ \mathbf{R}_{i+1} = \mathbb{C}_{i+1} \cos A_{i+1} - (\mathcal{A}_{i+1} \times \mathbb{C}_{i+1}) \sin A_{i+1}. \quad (8'')$$

Ferner vermerken wir noch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos \phi_i &= \mathcal{A}_i \mathcal{A}_{i+1}, \quad \sin \phi_i = (\mathbb{C}_i \mathcal{A}_i \mathcal{A}_{i+1}), \quad \mathbb{C}_i \sin \phi_i = \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_{i+1}; \\ \cos A_{i+1} &= \mathbb{C}_i \mathbb{C}_{i+1}, \quad \sin A_{i+1} = (\mathcal{A}_{i+1} \mathbb{C}_i \mathbb{C}_{i+1}), \quad \mathcal{A}_{i+1} \sin A_{i+1} = \mathbb{C}_i \times \mathbb{C}_{i+1}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt $i = 1, 2, \dots, n$.

Die einzelnen Glieder Σ_i der n -gliedrigen Kette werden jeweils durch das sich rechtwinkelig schneidende Achsenpaar $\Sigma_i = \{\mathcal{A}_i, \mathbb{C}_i\}$ repräsentiert. Vgl. Abb. 1.

Ausgehend vom System Σ_1 läßt sich rekursiv die Lage jedes Gliedes Σ_i ($i = 2, 3, \dots, n$) berechnen. In Σ_1 denken wir uns ein rechtwinkeliges Achsenkreuz $\{0; n_1, n_2, n_3\}$ angebracht, worauf wir alles beziehen wollen. Wir wählen etwa

$$\mathcal{A}_1 = n_2, \quad \mathbb{C}_1 = n_3, \quad \mathcal{A}_1 \times \mathbb{C}_1 = n_1. \quad (9)$$

Da bei Gelenkketten stets die gleich gebauten Formeln in Quaternionen bzw. Vektorschreibweise auftreten, kann man die Rekursion ein für allemal allgemein durchführen oder mit Computer-Textverarbeitung ausdrucken lassen. Mit wachsender Gliederzahl i werden die Formeln immer umfangreicher und können nur in einfachen Fällen elementar numerisch ausgewertet werden.

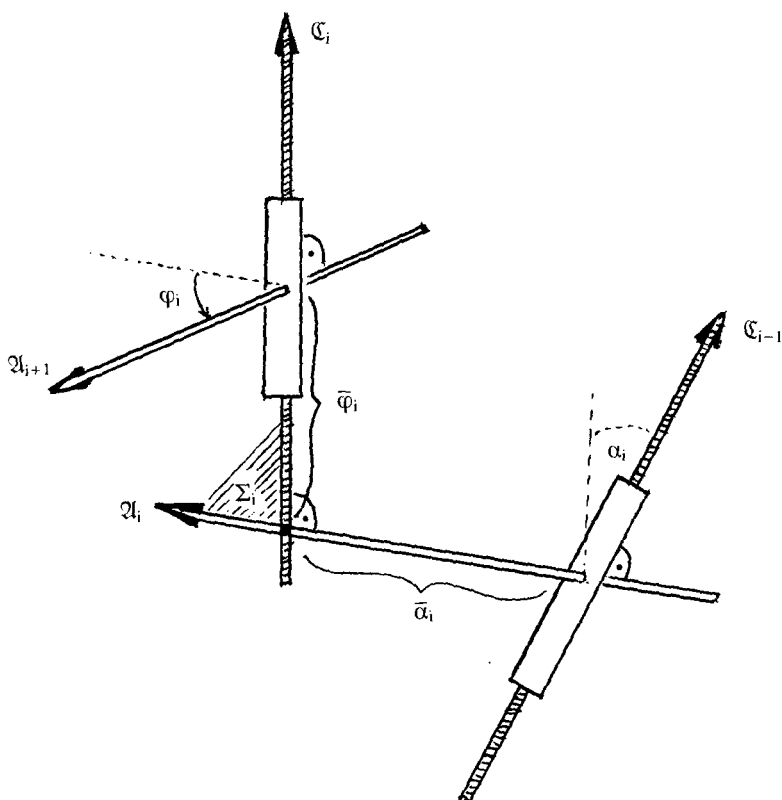


Abb. 1

Rekursion:

Erster Schritt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \cos \phi_1 + \mathfrak{C}_1 \sin \phi_1, & \mathfrak{A}_2 &= \mathbf{Q}_1 \circ \mathfrak{A}_1, \\ \mathbf{R}_2 &= \cos A_2 + \mathfrak{A}_2 \sin A_2, & \mathfrak{C}_2 &= \mathbf{R}_2 \circ \mathfrak{C}_1. \end{aligned} \quad (10_1)$$

Zweiter Schritt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &= \cos \phi_2 + \mathfrak{C}_2 \sin \phi_2, & \mathfrak{A}_3 &= \mathbf{Q}_2 \circ \mathfrak{A}_2 = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \mathfrak{A}_1, \\ \mathbf{R}_3 &= \cos A_3 + \mathfrak{A}_3 \sin A_3, & \mathfrak{C}_3 &= \mathbf{R}_3 \circ \mathfrak{C}_2 = \mathbf{R}_3 \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathfrak{C}_1. \end{aligned} \quad (10_2)$$

i^{ter} Schritt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= \cos \phi_i + \mathfrak{C}_i \sin \phi_i, & \mathfrak{A}_{i+1} &= \mathbf{Q}_i \circ \mathfrak{A}_i = \mathbf{Q}_i \circ \mathbf{Q}_{i-1} \circ \dots \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \mathfrak{A}_1, \\ \mathbf{R}_{i+1} &= \cos A_{i+1} + \mathfrak{A}_{i+1} \sin A_{i+1}, & \mathfrak{C}_{i+1} &= \mathbf{R}_{i+1} \circ \mathfrak{C}_i = \mathbf{R}_{i+1} \circ \mathbf{R}_i \circ \dots \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 \circ \mathfrak{C}_1. \end{aligned} \quad (10_i)$$

In Vektorschreibweise erhält man

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \cos \phi_1 + (\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{A}_1) \sin \phi_1, \quad \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 \cos A_2 + (\mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{C}_1) \sin A_2. \quad (10'_1)$$

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_2 \cos \phi_2 + (\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{A}_2) \sin \phi_2, \quad \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_2 \cos A_3 + (\mathfrak{A}_3 \times \mathfrak{C}_2) \sin A_3. \quad (10'_2)$$

$$\mathfrak{A}_{i+1} = \mathfrak{A}_i \cos \phi_i + (\mathfrak{C}_i \times \mathfrak{A}_i) \sin \phi_i, \quad \mathfrak{C}_{i+1} = \mathfrak{C}_i \cos A_{i+1} + (\mathfrak{A}_{i+1} \times \mathfrak{C}_i) \sin A_{i+1}. \quad (10'_i)$$

Sonderfälle:

- 1) Reine Drehungen (Drehpaare) um die Achse \mathbb{C}_i liegen vor für $\bar{\varphi}_i = \text{konst.}$ (Anwendung bei Robotern)
- 2) Reine Schiebungen längs der Achse \mathbb{C}_i (Schubpaare) treten für $\varphi_i = \text{konst. ein.}$
- 3) Bei einem ebenen Gelenkwerk treten parallele Achsen \mathbb{C}_i für $i = 1, 2, \dots, n$ auf.
- 4) Bei einem sphärischen Gelenkwerk gehen alle Drehachsen \mathbb{C}_i durch einen Festen Punkt bei $\bar{\varphi}_i = \text{konst.}$

III. Anwendungen, Geschlossene Gelenkketten

Mit diesem Kalkül kann man nun eine Reihe von Fragestellungen behandeln:

- 1) Ermittlung der Lage des i^{ten} Gliedes $\Sigma_i = \{\mathcal{A}_i, \mathbb{C}_i\}$ gegenüber dem Glied Σ_k , im besonderen Σ_1 für $i > k \geq 1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i &= \mathbf{Q}_{i-1} \circ \mathbf{Q}_{i-2} \circ \dots \circ \mathbf{Q}_{k+1} \circ \mathbf{Q}_k \circ \mathcal{A}_k, \\ \mathbb{C}_i &= \mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_{i-1} \circ \dots \circ \mathbf{R}_{k+1} \circ \mathbf{R}_k \circ \mathbb{C}_k.\end{aligned}$$

Bei festem Σ_1 können Σ_2 als angetriebenes Glied, ϕ_1 als Antriebsgröße, Σ_n als Abtriebsglied mit der Abtriebsgröße ϕ_n gewählt werden. Hierbei seien die Abmessungen A_i der Gelenkkette bekannt und hängen ϕ_1 und damit ϕ_i von einem reellen Parameter t (Zeit) ab. Dadurch wird eine zwangsläufige Bewegung der Gelenkkette beschrieben.

- 2) Die Bahnkurve eines im System Σ_i festen Punktes X kann mit

$$\overrightarrow{S_i X} = x_i = x_1 a_i + x_2 c_i + x_3 (a_i \times c_i), \quad x_j = \text{konst.}$$

gefunden werden, wobei S_i der Schnittpunkt der Geraden \mathcal{A}_i und \mathbb{C}_i ist. Für S_i gilt nach (1) die Darstellung

$$\overrightarrow{0 S_i} = \mathfrak{s}_i = (a_i c_i \bar{c}_i) a_i - (a_i c_i \bar{a}_i) c_i + (\bar{a}_i c_i) (a_i \times c_i)$$

mit 0 als Ursprung des festen Bezugskreuzes. Die Bahnkurve wird vom Ortsvektor $\overrightarrow{0 X} = \overrightarrow{0 S_i} + \overrightarrow{S_i X} = \mathfrak{s}_i + x_i$ beschrieben.

- 3) Von besonderem Interesse sind n -gliedrige Gelenkketten, die sich schließen. Für diese *geschlossenen Ketten* gilt also

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_1, \quad \mathbb{C}_{n+1} = \mathbb{C}_1, \quad (11)$$

Mit (10) führt dies zu Geschlossenheitsbedingungen ($i = n$)

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_n \circ \mathbf{Q}_{n-1} \circ \dots \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 &= 1, \\ \mathbf{R}_n \circ \mathbf{R}_{n-1} \circ \dots \circ \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 &= 1.\end{aligned} \quad (12)$$

Dieses System von Gleichungen gibt für geschlossene Ketten oder Teilketten in einem Stabwerk über Starrheit, Beweglichkeit von einem bestimmten Freiheitsgrad oder auch über infinitesimale Beweglichkeit (Wackeligkeit) Aufschluß. Diese Bedingungen

eröffnen aber auch die Möglichkeit, solche Eigenschaften zu erzwingen, d.h. entsprechende Gelenkwerke zu berechnen und zu konstruieren.

Da mit zunehmenden Werten von n die Formeln (12) bei expliziter Ausführung immer umfangreicher und unübersichtlicher werden, kann man zweckmäßig auch so vorgehen, daß man nicht die Formeln für den Übergang von Σ_1 zu Σ_n benützt, sondern daß man ausgehend von Σ_1 bis zu einem Glied Σ_j ungefähr in der Mitte der Kette rechnet und so eine Darstellung von \mathbb{C}_j findet. Dann geht man wieder von $\Sigma_1 = \Sigma_{n+1}$ aus, rechnet aber „rückwärts“ über $\Sigma_n, \Sigma_{n-1} \dots$ bis zum Glied Σ_j und ermittelt so ein \mathbb{C}_j^* . Durch Gleichsetzen $\mathbb{C}_j = \mathbb{C}_j^*$ gelangt man im allgemeinen zu einem einfacher gebauten Gleichungssystem. Diese Rekursion nach „rückwärts“ wird gemäß (10_i) durch

$$\mathcal{A}_{i-1} = \hat{\mathcal{Q}}_{i-1} \circ \mathcal{A}_i, \quad \mathbb{C}_{i-1} = \hat{\mathbf{R}}_i \circ \mathbb{C}_i \quad (13)$$

geliefert. Hierbei wird wiederum Σ_1 als fest (Gestell) angenommen und das Bezugskreuz gemäß (9) zugrunde gelegt.

Dieses Vorgehen soll im nächsten Abschnitt am Beispiel räumlicher Gelenkvierecke illustriert werden.

IV. Räumliche Gelenkvierecke

Unter den obigen Voraussetzungen führen wir die Rekursion mit $\mathcal{A}_1, \mathbb{C}_1$ beginnend nach den Formeln (10), (11) bis zur Darstellung von \mathbb{C}_3 durch. Rückwärts schreitend gelangen wir mit (13) ebenfalls zu einer Darstellung von \mathbb{C}_3 . Nun setzen wir die Übereinstimmung dieser beiden Darstellungen des gleichen dualen Vektors an und finden nach einigen Umformungen bei vorgegebenen Abmessungen A_i als Komponenten in Richtung von n_1, n_2, n_3 die folgenden drei dualen Gleichungen für die dualen Größen ϕ_i .

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \dots \sin A_2 \cos A_3 \cos \phi_1 + \cos A_2 \sin A_3 \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin A_3 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \\ & + \sin A_1 \cos A_4 + \cos A_1 \sin A_4 \cos \phi_4 = 0, \\ \text{(II)} \quad & \dots \sin A_2 \cos A_3 \sin \phi_1 + \cos A_2 \sin A_3 \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \sin A_3 \cos \phi_1 \sin \phi_2 - \\ & - \sin A_4 \sin \phi_4 = 0, \\ \text{(III)} \quad & \dots \sin A_2 \sin A_3 \cos \phi_2 + \cos A_1 \cos A_4 - \cos A_2 \cos A_3 - \\ & - \sin A_1 \sin A_4 \cos \phi_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Wie man sofort sieht, kommt in diesen Gleichungen ϕ_3 nicht vor und kann zuletzt aus $\cos \phi_3 = \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4$, $\sin \phi_3 = (\mathbb{C}_3 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4)$ berechnet werden. Aus (14) kann man also etwa ϕ_4 eliminieren. Dies könnte etwa so geschehen, daß aus (III) $\cos \phi_4$ und aus (II) $\sin \phi_4$ berechnet wird und in $\cos^2 \phi_4 + \sin^2 \phi_4 = 1$ eingesetzt wird. Von den beiden verbleibenden dualen Gleichungen hängt dann die ganze Analyse des Gelenkvierecks ab.

Diese zwei wesentlichen Gleichungen zwischen ϕ_1 und ϕ_2 entsprechen bei Trennung in Real- und Dualteil 4 Gleichungen zwischen $\varphi_i, \bar{\varphi}_i$ ($i = 1, 2$) – wir wollen sie für den Augenblick mit $g_k = 0$ ($k = 1, 2, 3, 4$) bezeichnen. Man kann im Falle reeller Lösungen etwa folgende allgemeine Aussagen treffen: Bei Abhängigkeit dieser Gleichungen ist das Gelenkviereck beweglich von einem Freiheitsgrad ≥ 1 . Bei Unabhängigkeit jedoch

werden ein oder endlich viele Lösungssysteme der 4 Gleichungen existieren, was im allgemeinen zu Starrheit des Gelenkvierecks führt.

Um *Wackelstrukturen* festzustellen, nehmen wir an, daß eine realisierbare Ausgangslage vorliegt. Dann betrachten wir die Änderungen $d\varphi_i, d\bar{\varphi}_i$ bei Differentialbildung $dg_k = 0$ der Gleichungen $g_k = 0$ und erhalten so ein homogenes lineares Gleichungssystem in $d\varphi_i, d\bar{\varphi}_i$. Für die Existenz eines nicht-trivialen Lösungssystems muß die Koeffizientendeterminante (Funktionaldeterminante) verschwinden. Im Fall einer wenigstens infinitesimalen Beweglichkeit muß diese zusätzliche Bedingung (Wackelbedingung)

$$\frac{\partial g_k}{\partial \varphi_i, \partial \bar{\varphi}_j} = 0$$

neben den übrigen Gleichungen $g_k = 0$ erfüllt sein. Dies kann für ein starres, aber auch für ein bewegliches Gelenkwerk eintreten. Falls Starrheit vorliegt, kann man im allgemeinen die Wackeligkeit am Modell bemerken.

Um den möglichen Zerfall der Gleichungen (14) in Produkte von 2 oder mehreren Faktoren zu erkennen, ist es zweckmäßig, zu *algebraischen* Gleichungen durch die Ansätze überzugehen:

$$P = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}, T = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} = \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}. \quad (15)$$

Dann ist

$$\cos A = \frac{1 - P^2}{1 + P^2}, \sin A = \frac{2P}{1 + P^2}; \cos \phi = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \sin \phi = \frac{2T}{1 + T^2}.$$

Bei Aufspaltung in Real- und Dualteil mit

$$A = \alpha + \varepsilon \bar{\alpha}, P = p + \varepsilon \bar{p}; \phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}, T = t + \varepsilon \bar{t}$$

erhält man die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \bar{p} = \frac{\bar{\alpha}}{1 + \cos \alpha}; t = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \bar{t} = \frac{\bar{\varphi}}{1 + \cos \varphi} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - p^2}{1 + p^2}, \sin \alpha = \frac{2p}{1 + p^2}, \bar{\alpha} = \frac{2\bar{p}}{1 + p^2}; \\ \cos \varphi &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \sin \varphi = \frac{2t}{1 + t^2}, \bar{\varphi} = \frac{2\bar{t}}{1 + t^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Die Anwendung dieser Transformationsformeln möge im nächsten Abschnitt an drei Klassen von Beispielen vorgeführt werden.

V. Klassen von Beispielen

Das System (14) der Bestimmungsgleichungen eines Gelenkvierecks vereinfacht sich im allgemeinen wesentlich bei Symmetrieeigenschaften und Übereinstimmung einiger Abmessungen der Gelenkkette.

1) So führt z.B. die *Forderung nach gleichen Abmessungen gegenüber liegender Glieder* des Gelenkwerks zu

$$A_3 = A_1, \quad A_4 = A_2.$$

Damit vereinfacht sich (14) auf:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \dots \cos A_1 \sin A_2 \cos \phi_1 + \sin A_1 \cos A_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin A_1 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \\ & + \sin A_1 \cos A_2 + \cos A_1 \sin A_2 \cos \phi_2 = 0, \\ \text{(II)} \quad & \dots \cos A_1 \sin A_2 \sin \phi_1 + \sin A_1 \cos A_2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \sin A_1 \cos \phi_1 \sin \phi_2 - \\ & - \sin A_2 \sin \phi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Bedingung (III) ist von selbst erfüllt, d.h. ergibt $\cos \phi_2 = \cos \phi_4$.

Der Ansatz (15) liefert Gleichungen, deren Produktgestalt man leicht erkennt:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \dots [T_1 T_2 (P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)] \cdot [T_1 T_2 (1 + P_1 P_2) - (1 - P_1 P_2)] = 0, \\ \text{(II)} \quad & \dots [T_1 (P_1 + P_2) + T_2 (P_1 - P_2)] \cdot [T_1 T_2 (1 + P_1 P_2) - (1 - P_1 P_2)] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Das Verschwinden des gemeinsamen zweiten Faktors

$$T_1 T_2 (1 + P_1 P_2) - (1 - P_1 P_2) = 0 \quad (19)$$

erweist sich als sinnvoll und ergibt bei Trennung von Real- und Dualteil die Bedingungen

$$t_1 t_2 (1 + p_1 p_2) - (1 - p_1 p_2) = 0 \quad (20)$$

$$(t_1 \bar{t}_2 + \bar{t}_1 t_2) (1 + p_1 p_2) + (p_1 \bar{p}_2 + \bar{p}_1 p_2) (1 + t_1 t_2) = 0. \quad (21)$$

Mit (16) findet man daraus

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & (\bar{\varphi}_1 \sin \varphi_2 + \bar{\varphi}_2 \sin \varphi_1) \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \\ & + (\bar{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 \sin \alpha_1) \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

In einer „gemischten“ Schreibweise können wir kürzer dafür setzen:

$$t_1 t_2 = C \quad (22^*)$$

$$\bar{\varphi}_1 t_2 (1 + t_1^2) + \bar{\varphi}_2 t_1 (1 + t_2^2) + D = 0 \quad (23^*)$$

mit

$$C \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad D \cos^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \bar{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 \sin \alpha_1.$$

Wegen (22*) kann man statt (23*) auch schreiben

$$\bar{\varphi}_1 (t_2 + C t_1) + \bar{\varphi}_2 (t_1 + C t_2) + D = 0. \quad (23^{**})$$

Von besonderem Interesse sind geschlossene Gelenkvierecke, die nur Drehgelenke aufweisen, d.h. für die $\bar{\varphi}_i = \text{konst.}$ ($i = 1, 2$) ist. Die Wackelbedingung errechnet sich durch Bildung der Funktionaldeterminante von (22*), (23*). Man erhält

$$\bar{\varphi}_1 t_2 (1 - t_1^2) - \bar{\varphi}_2 t_1 (1 - t_2^2) = 0. \quad (24)$$

Mit (16) daraus

$$\bar{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \bar{\varphi}_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = 0. \quad (24^*)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Abmessungen A_i in diese Form der Wackelbedingung nicht eingehen, was auf den projektiven Charakter der infinitesimalen Beweglichkeit hinweist.

Die Auflösung des Systems (22*), (23*) nach t_1, t_2 und damit φ_1, φ_2 führt auf eine quadratische Gleichung. Die beiden Lösungspaare gehören zu zwei starren, aber nicht wackeligen Formen des Gelenkvierecks. Falls jedoch die Wackelbedingung noch erfüllt ist, decken sich die beiden Lösungspaare (Verschwinden der Diskriminante der quadratischen Gleichung). In diesem Fall lauten die Lösungen

$$t_1 = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = -2 \frac{C}{D} (\bar{\varphi}_1 + C \bar{\varphi}_2), \quad t_2 = \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = -\frac{D}{2(\bar{\varphi}_1 + C \bar{\varphi}_2)}. \quad (25)$$

Als wichtigsten Sonderfall des Systems (22), (23) wird für

$$\bar{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 \sin \alpha_1 = 0$$

und $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0$ der bewegliche *Bennett'sche Mechanismus* erhalten. (23) ist trivial erfüllt, (22) bestimmt die Beweglichkeit vom Freiheitsgrad eins. [3]

Weitere Gleichheiten unter den Abmessungen des Gelenkvierecks bewirken in den Gleichungen (22), (23), (24) beträchtliche Vereinfachungen. So kann z. B. die Gleichheit der Schrägwinkel $\alpha = \alpha_i$, die Übereinstimmung der Stablängen $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_i$ oder (und) der Versetzungen $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_i$ angenommen werden und führt zu Gruppen von Beispielen.

Im Sonderfall $\alpha = \alpha_i$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_i$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_i$ nehmen unsere Gleichungen besonders einfache Gestalt an:

$$t_1 \cdot t_2 = \cos \alpha, \quad \bar{\varphi} (t_1 + t_2) + 2 \bar{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Die Wackelbedingung lautet $t_1 = t_2$. In diesem Fall starrer, aber wackeliger Gelenkvierecke lauten die Lösungen

$$t_1 = t_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varphi}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \text{wobei } \bar{\alpha}^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \bar{\varphi}^2 \cos \alpha$$

als Bedingung auftritt.

W. Wunderlich brachte eine Reihe von Beispielen durch Vorgabe der Abmessungen und Versetzungen, die sich als spezielle numerische Beispiele hier einordnen. [4]

Ein *Gelenkviereck mit zwei Drehgelenken und zwei Schubgelenken*, die sich jeweils gegenüber liegen, mit etwa $\varphi_2 = \text{konst.} \neq 0$, $\bar{\varphi}_1 = \text{konst.} \neq 0$ ist starr, wie (22*), (23**) erkennen läßt. Für $t_1 + C t_2 = 0$ herrscht Wackeligkeit.

Im Sonderfall $\varphi_2 = 0$, $\bar{\varphi}_1 = 0$ muß auch $C = 0$ oder $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ sein, womit (22*) Genüge geleistet wird. Es muß dann die aus (23*) folgende Gleichung

$$\bar{\varphi}_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2}{\sin \alpha_1} = 0$$

erfüllt sein. Dieses Viereck hat den Freiheitsgrad eins.

Schließlich können wir noch in unserem Rahmen *Gelenkvierecke mit vier Schubgelenken* betrachten: $\varphi_1 = \text{konst.} \neq 0$, $\varphi_2 = \text{konst.} \neq 0$. C muß einer leicht angebbaren Bedingung genügen. Die Schubstrecken $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ erfüllen die lineare Gleichung (23*), woraus die Beweglichkeit vom Freiheitsgrad eins folgt.

Im Sonderfall $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ muß $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$, $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 0$ gelten und sind die Schiebstrecken keiner einschränkenden Bedingung unterworfen: Freiheitsgrad zwei.

2) Eine weitere Klasse von speziellen Gelenkvierecken wird durch die *schiefe Symmetrieforderung* $A_3 = -A_1$, $A_4 = -A_2$ erhalten. Das System (14) nimmt die folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \dots \cos A_1 \sin A_2 \cos \phi_1 - \sin A_1 \cos A_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin A_1 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \\ & + \sin A_1 \cos A_2 - \cos A_1 \sin A_2 \cos \phi_2 = 0, \\ \text{(II)} \quad & \dots \cos A_1 \sin A_2 \sin \phi_1 - \sin A_1 \cos A_2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 - \sin A_1 \cos \phi_1 \sin \phi_2 + \\ & + \sin A_2 \sin \phi_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(III) reduziert sich wieder auf $\cos \phi_2 = \cos \phi_4$.

Durch die Transformationsformeln (15) werden wir ebenfalls auf Gleichungen geführt, die sich jeweils als Produkt zweier Faktoren schreiben lassen:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad & \dots [T_1(P_1 - P_2) + T_2(P_1 + P_2)] \cdot [T_1(1 + P_1 P_2) + T_2(1 - P_1 P_2)] = 0, \\ \text{(II)} \quad & \dots [(P_1 - P_2) - (P_1 + P_2)T_1 T_2] \cdot [T_1(1 + P_1 P_2) + T_2(1 - P_1 P_2)] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Sinnvoll erscheint das Nullsetzen des zweiten Faktors

$$T_1(1 + P_1 P_2) + T_2(1 - P_1 P_2) = 0. \quad (28)$$

Die Aufspaltung führt zu

$$t_1(1 + p_1 p_2) + t_2(1 - p_1 p_2) = 0, \quad (29)$$

$$(t_1 - t_2)(p_1 \bar{p}_2 + \bar{p}_1 p_2) + \bar{t}_1(1 + p_1 p_2) + \bar{t}_2(1 - p_1 p_2) = 0. \quad (30)$$

Daraus mit (16)

$$t_1 \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + t_2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} (t_1 - t_2) (\bar{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 \sin \alpha_1) + 2 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2} \left[\bar{\varphi}_1 (1 + t_1^2) \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \right. \\ \left. + \bar{\varphi}_2 (1 + t_2^2) \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Als *Gegenstück zum Bennett'schen Mechanismus* ergibt sich unter den Bedingungen $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0$ und

$$\bar{\alpha}_1 \sin \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 \sin \alpha_1 = 0$$

ebenfalls ein bewegliches Gelenkviereck.

Für die ersten beiden Beispielklassen dieses Abschnitts war charakteristisch, daß die beiden Gleichungen (I) und (II) jeweils in zwei Faktoren zerlegt werden können, wobei ein Faktor gemeinsam auftritt. Gleichung (III) drückt nur eine Symmetrieeigenschaft von Größen ϕ_i aus.

3) Nun kann auch der Fall eintreten, daß die dualen Gleichungen (I) und (II) die gleiche Aussage liefern, d.h. daß zur *Bestimmung des Gelenkvierecks nur eine duale Gleichung* vorliegt. Dies trifft etwa für die folgenden Voraussetzungen zu: $A_2 = A_1$, $A_4 = A_3$. (Es gibt dann zwei Paare benachbarter Glieder von gleichen Abmessungen.) Nach wenigen Umformungen vereinfacht sich das System (14) auf

$$(1 + \cos \phi_1) (\sin A_1 \cos A_3 + \cos A_1 \sin A_3 \cos \phi_2) - \sin A_3 \sin \phi_1 \sin \phi_2 = 0, \quad (33)$$

sowie (III) ... $\cos \phi_2 = \cos \phi_4$.

Statt (33) können wir auch schreiben

$$T_2^2 (P_1 - P_3) (1 + P_1 P_3) + (P_1 + P_3) (1 - P_1 P_3) - 2 T_1 T_2 P_3 (1 + P_1^2) = 0 \quad (34)$$

Wir beschränken uns auf den Sonderfall

$$P_1 P_3 + 1 = 0. \quad (35)$$

(34) läßt sich nun in

$$T_1 T_2 (1 + P_1^2) - (1 - P_1^2) = 0 \quad (36)$$

überführen. Mit (15) und (35) gelangt man zu

$$T_1 T_2 = \cos A_1 = -\cos A_3,$$

wobei $A_3 = \pi \pm A_1$ gilt. Durch Zerlegung $\alpha_3 = \pi \pm \alpha_1$, $\bar{\alpha}_3 = \pm \bar{\alpha}_1$ und Aufspaltung der dualen Gleichung (36) finden wir

$$t_1 t_2 = \cos \alpha_1, \quad \bar{\varphi}_1 (t_2 + t_1 \cos \alpha_1) + \bar{\varphi}_2 (t_1 + t_2 \cos \alpha_1) + \bar{\alpha}_1 \sin \alpha_1 = 0. \quad (38)$$

Wenn wir uns auf Drehgelenke beschränken, so führt die Auflösung wiederum auf eine quadratische Gleichung. (Vgl. die formale Ähnlichkeit mit den gestirnten Formeln (22), (23).)

VI. Schlußbemerkungen

- 1) *Existenzfrage:* Das duale Gleichungssystem (14) eines Gelenkvierecks entspricht auf Grund der Transformationsformeln (15), (16) einem System von drei dualen algebraischen Gleichungen; bei Aufspaltung in Real- und Dualteil sind es sechs reelle algebraische Gleichungen. Bei Elimination von ϕ_4 , wie in Abschnitt IV angedeutet, handelt es sich um zwei duale bzw. vier reelle algebraische Gleichungen. Je nach den Voraussetzungen, d.h. der Vorgabe der A_i (Abmessungen der einzelnen Kettenglieder Σ_i) und der Annahmen über die ϕ_i (Drehgelenke, Schubgelenke oder Dreh-Schubgelenke) kann dieses algebraische Gleichungssystem nun reelle Lösungen besitzen und zu reellen Gelenkvierecken führen, oder aber komplexe Lösungen aufweisen, denen keine reellen Gelenkvierecke entsprechen.

- 2) *Achsen der Gelenkwerke*: Ausgehend von dem zugrunde gelegten Achsenkreuz $\{0; n_1, n_2, n_3\}$ kann mit den Rekursionsformeln (10) von Abschnitt II eine Berechnung der Achsen \mathcal{C}_i (und gemeinsamen Lote \mathcal{A}_i) des Gelenkwerks vorgenommen werden.
- 3) *Allgemeine Gelenkwerke*: Enthält eine mehrgliedrige Kette eine oder mehrere geschlossene Teilketten, so müssen für letztere die Geschlossenheitsbedingungen berücksichtigt und in die Darstellung der Ausgangskette eingebaut werden, wofür die Quaternionenschreibweise nützlich ist.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Blaschke: Anwendung dualer Quaternionen auf Kinematik. Ann. Acad. Scient. Fennicae Ser. A I, No. 250/3 (1958), 1–13.
Kinematik und Quaternionen (Math. Monogr. Bd. 4), Berlin 1960.
- [2] A. T. Yang, F. Freudenstein: Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms. Transactions of the ASME / Journal of Applied Mechanics June 1964, 300–308.
- [3] G. T. Bennett: A new mechanism, Engineering 76 (1903), 777–778.
The skew isogram mechanism. Proc. London Math. Soc. 13 (1914), 151–173.
- [4] W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum. Elem. Math. 26 (1971), 73–83.